

一类新特征函数的应用

赵 亮, 韩朝阳

(哈尔滨理工大学 理学院, 哈尔滨 150080)

摘 要: 在 Banach 空间中, 考虑引入一类新的定义于 $[0, +\infty)$ 上, 关于实数 t 的实特征函数 $f_{x+ty}(y)$ 和 $f_{x+ty}(x)$, 这类新特征函数的相应性质可以用于刻画 Banach 空间的许多几何性质。本文从这类新特征函数的角度出发, 讨论了在 Banach 空间中, 这类新特征函数与广义凸性模, 广义光滑模之间新的等价形式, 从而给出判断 Banach 空间一致凸, 一致光滑的一种新方法。

关键词: Banach 空间; 广义凸性模; 广义光滑模; 一致凸; 一致光滑

DOI: 10.15938/j.jhust.2021.02.021

中图分类号: O177.7 **文献标志码:** A **文章编号:** 1007-2683(2021)02-0154-07

Application of a New Class of Characteristic Function

ZHAO Liang, HAN Zhao-yang

(College of Science, Harbin University of Science and Technology, Harbin 150080, China)

Abstract: In Banach space, considering introducing a new class of real characteristic functions $f_{x+ty}(y)$ and $f_{x+ty}(x)$, the independent variable is t , and the domain is $[0, +\infty)$, and the corresponding properties of those new characteristic functions are used to characterize many geometric properties of Banach spaces. This paper proceeds with the point of view of this new characteristic function. In this paper, we discuss a new equivalent of between such new characteristic functions and generalized modulus of convexity and generalized modulus of smoothness in Banach spaces. A new method of judging uniformly convex and uniformly smooth Banach spaces is given.

Keywords: Banach spaces; generalized modulus of convexity; generalized modulus of smoothness; uniformly convex; uniformly smooth

0 引 言

在 Banach 空间的各种凸性中, 一致凸空间是目前为止我们所知道的在几何性质方面“弱”于 Hilbert 空间的“最强”空间。随着 Banach 空间几何理论的发展, 人们已经引入各种凸性, 在对文 [1-2]

中有关结论的分析后, 我们发现在最佳逼近以及不动点理论, 鞅论中, 这些凸性都有非常重要的应用, 这使得 Banach 空间几何理论变得越来越丰富。Banach 空间凸性与光滑性的研究一直是从事 Banach 空间几何数学工作者研究的主要内容, 1936 年 J. Clarkson 在文 [3] 中定义了刻画一致凸性的凸性模之后, 凸性模一直是判定 Banach 空间一致凸, 严

收稿日期: 2019-09-11

基金项目: 黑龙江省教育厅科学技术研究项目(12541145)。

作者简介: 韩朝阳(1995—), 男, 硕士研究生。

通信作者: 赵 亮(1970—), 男, 教授, E-mail: zhaoliang@hrbust.edu.cn。

格凸等凸性的重要方法。光滑性是作为凸性的对偶性质提出来的,光滑模是凸性模具有对偶性质的模。文[4]将凸性模与光滑模进行了推广,便是广义凸性模,广义光滑模,与经典凸性模、光滑模比较起来。在广义凸性模、广义光滑模中可以选择适当的 α (而非局限于经典中的 $\frac{1}{2}$)进行计算。1975年J. Diestel

在文[5] P. 21的式(1)中得出一组不等式之后,程立新等于1988年在文[6]为Banach空间引入了一类特征函数,用于刻画Banach空间的众多几何性质。近些年来,有关凸性模与光滑模的性质与应用也得到了理论研究成果[7-14]。本文通过对文[15-24]中有关凸性模与光滑模的分析,将特征函数与广义凸性模、广义光滑模的关系进行讨论,从而给出这类新特征函数在Banach空间中的应用,同时也为各种凸性模的研究提供新的参考方向,给研究者一种新的认识,新的启迪。

1 基本概念

在本文中,以 X 表示Banach空间, $S(X)$, $S(X^*)$ 分别表示 X 及其对偶空间 X^* 的单位球面。

对于 $\forall x \in X$,取定一个 $f_x \in S(X^*)$ 满足 $f_x(x) = \|x\|$,这样便得到一个 X 到 $S(X^*)$ 映射

$$x \rightarrow f_x$$

并约定对 $\forall \alpha > 0, f_{\alpha x} = f_x$ 。

考虑文[5] P. 21的(1):对于 $z_1, z_2 \in S(X)$, $\lambda > 0$ 有

$$f_{z_1 + \lambda z_2}(z_2) \geq \|z_1 + \lambda z_2\| - \|z_1\| \geq \lambda f_{z_1}(z_2) \quad (1)$$

文[6]后来证明了式(1)对于一切 $z_1, z_2 \in X$ 和实数 λ 均成立。

在文[6]中定义了 $[0, +\infty)$ 上的关于 t 的实函数 $f_{x+ty}(x), f_{x+ty}(y)$ 。并且证明了 $f_{x+ty}(y)$ 单调递增, $f_{x+ty}(x)$ 单调递减。

其中 $f_{x+ty}(y) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\|x + ty + hy\| - \|x + ty\|}{h}$,
 $f_{x+ty}(x) + t f_{x+ty}(y) = \|x + ty\|$ 。

定义1^[6] 函数

$$\delta_X^{(\alpha)}(\varepsilon) = \inf\{1 - \|\alpha x + (1 - \alpha)y\| : x, y \in S(X), \|x - y\| \geq \varepsilon\}, \alpha \in (0, 1)$$

被称为是Banach空间 X 的广义凸性模。

定义2^[6] 函数

$$\rho_X^\alpha(t) = \sup\left\{\left\|\alpha x + \frac{t}{2}y\right\| + \left\|(1 - \alpha)x - \frac{t}{2}y\right\| - 1\right\}$$

$$x, y \in S(X)\}, \alpha \in (0, 1)$$

被称为是Banach空间的广义光滑模。

定义3 设 $M = \{(x, y) \in S(X) \times S(X), \exists f_x \in S(X^*), f_x(x) = \|x\|, f_x(y) = 0\}$ 。

$$\text{令 } c^\alpha(t) = (1 - \alpha) \left[1 - \sup_{(x, y) \in M} f_{x+ty}(x)\right], s^\alpha(t) = t \sup_{(x, y) \in M} f_{x+\frac{t}{\alpha}y}(y)。$$

这里的 α 便是广义凸性模,广义光滑模中的 α 。

命题1^[2] Banach空间 X 是一致凸的充要条件是对任何 $t \in (0, 2]$,有 $\delta_X^{(\alpha)}(t) > 0$ 。

命题2^[14] Banach空间 X 是一致光滑的等价条件为 $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\rho_X^\alpha(t)}{t} = 0$ 。

引理1^[8] 设 $x, y \in S(X)$, $t \geq 0$,则 $\|x + ty\| - \|x\| = \int_0^t f_{x+sy}(y) ds$ 。

证明:因 $g(s) = \|x + sy\|$ 为连续凸函数,故除可列点外 $g'(s)$ 处处可导,所以

$$g(t) - g(0) = \int_0^t g'(s) ds$$

当 $g'(s)$ 存在时

$$g'(s) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\|x + sy + hy\| - \|x + sy\|}{h} = N_+(x + sy, y)$$

文[6]的结果表明

$$N_+(x + sy, y) = \max_{\substack{f \in S(X^*) \\ f(x+sy) = \|x+sy\|}} f(y)。$$

因而 $g'(t) = N_+(x + ty, y) = f_{x+ty}(y)$,

故 $g'(s) \stackrel{a.e}{=} f_{x+sy}(y)$,从而 $g(t) = g(t) - g(0) = \int_0^t f_{x+sy}(y) ds$ 。

证闭。

2 主要内容

在给出了一些说明与基本定义之后,下面便是对广义凸性模,广义光滑模与特征函数关系的探讨,于是我们可以得出下面的定理与推论。

定理1 $c^\alpha\left(\frac{\alpha'}{2}t\right) \leq \delta_X^{(\alpha)}(t) \leq c^\alpha(4t)$, $t \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$,

其中 $\alpha' = \min\{\alpha, 1 - \alpha\}$ 。

证明:先证明不等式的右半部分成立

$$\delta_X^{(\alpha)}(t) = \inf\{1 - \|\alpha x + (1 - \alpha)y\| : x, y \in S(X),$$

$$\begin{aligned} & \|x - y\| \geq t\} = \\ & \inf\{1 - \|x + (1 - \alpha)(y - x)\| : x, y \in S(X), \|x - y\| \geq t\} = \\ & \inf\left\{1 - \left\|x + (1 - \alpha)\|y - x\| \cdot \frac{y - x}{\|y - x\|}\right\| : x, y \in S(X), \|x - y\| \geq t\right\} \end{aligned}$$

由式(1)得

$$\begin{aligned} & \leq \inf\left\{- (1 - \alpha)\|y - x\| f_x\left(\frac{y - x}{\|y - x\|}\right) : \|x - y\| \geq t, x, y \in S(X)\right\} = \\ & (1 - \alpha)\{1 - f_x(y) : \|x - y\| \geq t, x, y \in S(X)\}. \end{aligned}$$

下面我们证明, 当 $(y, x) \in M$ 时 $\left(\frac{y + 4tx}{\|y + 4tx\|}, y\right) \in \{(x_1, x_2) : x_1, x_2 \in S(X), \|x_1 - x_2\| \geq t\}$ 。

由于 $f_y \in S(X^*)$, 所以 $\|f_y\| = 1, |k_1| = |f_y(k_1y + k_2x)| \leq |k_1y + k_2x|, \forall k_1, k_2 \in R$ 。

即有 $|k_1y + k_2x| \geq |k_1|, \forall k_1, k_2 \in R$ 。

(i) 若 $\|y + 4tx\| \geq 2$, 则

$$\begin{aligned} & \left\|\frac{y + 4tx}{\|y + 4tx\|} - y\right\| = \frac{1}{\|y + 4tx\|} \|(\|y + 4tx\| - 1)y + 4tx \| \geq \frac{1}{\|y + 4tx\|} (\|y + 4tx\| - 1) \geq \frac{1}{2} \geq t, \\ & t \in \left[0, \frac{1}{2}\right]. \end{aligned}$$

(ii) 若 $\|y + 4tx\| < 2, \|y + 4tx\| - 1 < 2t$, 则

$$\begin{aligned} & \left\|\frac{y + 4tx}{\|y + 4tx\|} - y\right\| = \left\|\left(\frac{1}{\|y + 4tx\|} - 1\right)y + \frac{4tx}{\|y + 4tx\|}\right\| = \\ & \frac{1}{\|y + 4tx\|} \|(\|y + 4tx\| - 1)y + 4tx \| \geq \frac{1}{2} (\|4tx\| - | \|y + 4tx\| - 1 |) = \\ & \frac{1}{2} [t - (\|y + 4tx\| - 1)] \geq \frac{1}{2} \cdot 2t = t. \end{aligned}$$

(iii) 若 $\|y + 4tx\| < 2, \|y + 4tx\| - 1 > 2t$, 则

$$\begin{aligned} & \left\|\frac{y + 4tx}{\|y + 4tx\|} - y\right\| = \frac{1}{\|y + 4tx\|} \|(\|y + 4tx\| - 1)y + 4tx \| \geq \frac{1}{2} | \|y + 4tx\| - 1 | \geq \frac{1}{2} \cdot 2t = t. \end{aligned}$$

由此知, 总有 $\left\|\frac{y + 4tx}{\|y + 4tx\|} - y\right\| \geq t$ 。

即当 $(y, x) \in M$ 时, $\left(\frac{y + 4tx}{\|y + 4tx\|}, y\right) \in \{(x_1, x_2) : x_1, x_2 \in S(X), \|x - y\| \geq t\}$ 。

综上所述可得

$$\begin{aligned} & \sup\{f_x(y) : \|x - y\| \geq t, x, y \in S(X)\} \geq \\ & \sup\left\{f_{\frac{y + 4tx}{\|y + 4tx\|}}(y) : (y, x) \in M\right\} = \sup\{f_{y + 4tx}(y) : (y, x) \in M\} \end{aligned}$$

即可得出

$$(1 - \alpha) [1 - \sup\{f_x(y) : \|x - y\| \geq t, x, y \in S(X)\}] \leq (1 - \alpha) [1 - \sup\{f_{y + 4tx}(y) : (y, x) \in M\}] = c^\alpha(4t)$$

故 $\delta_X^{(\alpha)}(t) \leq c^\alpha(4t)$ 得证。

下面证明不等式的左半部分成立。

(i) 当 $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$ 时

$$\delta_X^{(\alpha)}(t) = (1 - \alpha) - \sup\{\|\alpha x + (1 - \alpha)y\| - \alpha : x, y \in S(X), \|x - y\| = t\} =$$

$$(1 - \alpha) - \alpha \sup\left\{\left\|x + \frac{1 - \alpha}{\alpha}y\right\| - 1 : x, y \in S(X), \|x - y\| = t\right\} \geq$$

$$(1 - \alpha) \left[1 - \sup\left\{\left\|x + \frac{1 - \alpha}{\alpha}y\right\| - 1 : x, y \in S(X), \|x - y\| = t\right\}\right]$$

由式(1)有

$$\begin{aligned} & \geq (1 - \alpha) \left[1 - \sup\{f_{x + \frac{1 - \alpha}{\alpha}y}(y) : x, y \in S(X), \|x - y\| = t\}\right] = \\ & (1 - \alpha) \left[1 - \sup\{f_{\frac{1 - \alpha}{\alpha}y + \frac{x + \frac{1 - \alpha}{\alpha}ay}{1 - \alpha}}(y) : x, y \in S(X), \right. \end{aligned}$$

$$\left. a = \frac{-\alpha}{1 - \alpha} f_y(x)\right\}] =$$

$$(1 - \alpha) \left[1 - \sup\left\{f_{\frac{1 - \alpha}{\alpha}y + \frac{\frac{\alpha}{1 - \alpha}x + ay}{1 - \alpha}}(y) : x, y \in S(X), \right. \right.$$

$$\left. a = \frac{-\alpha}{1 - \alpha} f_y(x)\right\}] =$$

$$(1 - \alpha) \left[1 - \sup\left\{f_{y + \frac{\frac{\alpha}{1 - \alpha}x + ay}{1 - \alpha}}(y) : x, y \in S(X), \right. \right.$$

$$\left. a = \frac{-\alpha}{1 - \alpha} f_y(x)\right\}] =$$

$$(1 - \alpha) \left[1 - \sup\left\{f_{y + \frac{\left\|\frac{\alpha}{1 - \alpha}x + ay\right\|}{1 - \alpha}}(y) : x, y \in S(X), \right. \right.$$

$$\left. a = \frac{-\alpha}{1 - \alpha} f_y(x), z = \frac{\frac{\alpha}{1 - \alpha}x + ay}{\left\|\frac{\alpha}{1 - \alpha}x + ay\right\|}\right\}]$$

注意此时

$$\begin{aligned} a &= \frac{-\alpha}{1 - \alpha} f_y(x) = \frac{-\alpha}{1 - \alpha} f_y(x - y) - \frac{\alpha}{1 - \alpha} \leq \\ & \frac{\alpha}{1 - \alpha} \|x - y\| - \frac{\alpha}{1 - \alpha} = \frac{\alpha}{1 - \alpha} (t - 1) < 0. \end{aligned}$$

$$\text{由于 } z = \frac{\frac{\alpha}{1 - \alpha}x + ay}{\left\|\frac{\alpha}{1 - \alpha}x + ay\right\|}, \text{ 所以 } f_y(z) =$$

$$\left\| \frac{1}{\frac{\alpha}{1-\alpha}x + ay} \right\| \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}f_y(x) + a \right) = 0.$$

故 $(y, z) \in M$, 而 $a = \frac{-\alpha}{1-\alpha}f_y(x)$, 又 $f_y(x) \leq 1$, 所以

$$\frac{1}{1-a} \geq 1-\alpha.$$

于是我们可以得到 $\left\| \frac{\frac{\alpha}{1-\alpha}x + ay}{1-a} \right\| \geq$

$$(1-\alpha) \left\| \frac{\alpha}{1-\alpha}x + ay \right\|.$$

当 $\frac{\alpha}{1-\alpha} + a \leq \frac{\alpha t}{2(1-\alpha)}$ 时, 有

$$(1-\alpha) \left\| \frac{\alpha}{1-\alpha}x + ay \right\| \geq$$

$$(1-\alpha) \left\| \frac{\alpha}{1-\alpha}(x-y) + \left(\frac{\alpha}{1-\alpha} + a \right) y \right\| \geq$$

$$(1-\alpha) \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}t - \frac{\alpha}{2(1-\alpha)}t \right) = \frac{\alpha t}{2}.$$

当 $\frac{\alpha}{1-\alpha} + a > \frac{\alpha}{2(1-\alpha)}t$ 时, 有

$$(1-\alpha) \left\| \frac{\alpha}{1-\alpha}x + ay \right\| > (1-\alpha) \left(\frac{\alpha}{1-\alpha} - |a| \right) >$$

$$(1-\alpha) \frac{\alpha t}{2(1-\alpha)} = \frac{\alpha t}{2}.$$

利用 $f_{y+tz}(y)$ 的单调递减性可知 $f_{y+\frac{\frac{\alpha}{1-\alpha}x+ay}{1-a}}(y) \leq f_{y+\frac{\alpha}{2}}(y)$.

则有

$$\delta_X^{(a)}(t) \geq (1-\alpha) \left[1 - \sup \left\{ f_{y+\frac{\frac{\alpha}{1-\alpha}x+ay}{1-a}}(y) : x, y \in S(X) \right\} \right],$$

$$a = \frac{-\alpha}{1-\alpha}f_y(x), z = \left\| \frac{\frac{\alpha}{1-\alpha}x + ay}{\frac{\alpha}{1-\alpha}x + ay} \right\| \geq$$

$$(1-\alpha) \left[1 - \sup \left\{ f_{y+\frac{\alpha}{2}}(y) : (y, z) \in M \right\} \right] = c^\alpha \left(\frac{\alpha t}{2} \right).$$

所以此时 $\delta_X^{(a)}(t) \geq c^\alpha \left(\frac{\alpha t}{2} \right)$.

(ii) 当 $\frac{1}{2} \leq \alpha < 1$ 时

$$\delta_X^{(a)}(t) = \alpha - \sup \{ \| \alpha x + (1-\alpha)y \| - (1-\alpha) : x, y \in S(X), \| x - y \| = t \} \geq$$

$$(1-\alpha) \left[1 - \sup \left\{ \left\| \frac{\alpha}{1-\alpha}x + y \right\| - 1 : x, y \in \right. \right.$$

$$\left. S(X), \| x - y \| = t \right\} \right]$$

由本文中的式(1)有

$$\geq (1-\alpha) \left[1 - \sup \left\{ \left\| f_{y+\frac{\alpha}{1-\alpha}x}(x) : x, y \in S(X) \right\| \right] =$$

$$(1-\alpha) \left[1 - \sup \left\{ f_{\frac{\alpha}{1-\alpha}x + \frac{y+\frac{\alpha}{1-\alpha}x}{1-a}}(x) : x, y \in S(X), \right. \right.$$

$$\left. a = -\frac{1-\alpha}{\alpha}f_x(y) \right\} \right] =$$

$$(1-\alpha) \left[1 - \sup \left\{ f_{x+\frac{\frac{1-\alpha}{\alpha}y+ax}{1-a}}(x) : x, y \in S(X), \right. \right.$$

$$\left. a = -\frac{1-\alpha}{\alpha}f_x(y), z = \left\| \frac{ax + \frac{1-\alpha}{\alpha}y}{ax + \frac{1-\alpha}{\alpha}y} \right\| \right\} \right]$$

此时

$$a = -\frac{1-\alpha}{\alpha}f_x(y) = -\frac{1-\alpha}{\alpha}f_x(y-x) - \frac{1-\alpha}{\alpha} \leq$$

$$\frac{1-\alpha}{\alpha} \| y - x \| - \frac{1-\alpha}{\alpha} = \frac{1-\alpha}{\alpha} (t-1) < 0.$$

其中 $z = \frac{ax + \frac{1-\alpha}{\alpha}y}{\left\| ax + \frac{1-\alpha}{\alpha}y \right\|}$, 从而得出 $f_x(z) =$

$$\frac{1}{\left\| ax + \frac{1-\alpha}{\alpha}y \right\|} \left(a + \frac{1-\alpha}{\alpha}f_x(y) \right) = 0.$$

所以 $(x, z) \in M$. 又 $a = -\frac{1-\alpha}{\alpha}f_x(y)$, 易知 $\frac{1}{1-a} \geq \alpha$.

则有 $\frac{\left\| \frac{1-\alpha}{\alpha}y + ax \right\|}{1-a} \geq \alpha \left\| \frac{1-\alpha}{\alpha}y + ax \right\|.$

从而当 $\frac{1-\alpha}{\alpha} + a \leq \frac{1-\alpha}{2\alpha}t$ 时

$$\alpha \left\| \frac{1-\alpha}{\alpha}y + ax \right\| \geq$$

$$\alpha \left\| \frac{1-\alpha}{\alpha}(y-x) + \left(\frac{1-\alpha}{\alpha} + a \right) x \right\| \geq$$

$$\alpha \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}t - \frac{1-\alpha}{2\alpha}t \right) = \frac{1-\alpha}{2}t,$$

当 $\frac{1-\alpha}{\alpha} + a > \frac{1-\alpha}{2\alpha}t$ 时

$$\alpha \left\| \frac{1-\alpha}{\alpha}y + ax \right\| > \alpha \left(\frac{1-\alpha}{\alpha} - |a| \right) > \alpha \cdot \frac{1-\alpha}{2\alpha}t = \frac{1-\alpha}{2}t.$$

于是总有 $\frac{\left\| \frac{1-\alpha}{\alpha}y + ax \right\|}{1-a} \geq \frac{1-\alpha}{2}t,$

利用 $f_{x+tz}(x)$ 的单调递减性可得 $f_{x+\frac{\frac{1-\alpha}{\alpha}y+ax}{1-a}}(x) \leq f_{x+\frac{1-\alpha}{2}}(x),$

则

$$\delta_X^{(\alpha)}(t) \geq (1-\alpha) [1 - \sup\{f_{x+\frac{1-\alpha}{1-\alpha}y}(x) : x, y \in S(X),$$

$$a = -\frac{1-\alpha}{\alpha} f_x(y), z = \frac{ax + \frac{1-\alpha}{\alpha}y}{\left\| ax + \frac{1-\alpha}{\alpha}y \right\|} \Bigg] \geq$$

$$(1-\alpha) [1 - \sup\{f_{x+\frac{1-\alpha}{2}y}(x) : (x, y) \in M\}] = c^\alpha \left(\frac{1-\alpha}{2} t \right).$$

所以 $\delta_X^{(\alpha)}(t) \geq c^\alpha \left(\frac{1-\alpha}{2} t \right)$ 。综上可知不等式的左半部分成立。

由此我们可以得出这样的推论:

推论 1 X 一致凸当且仅当

$$c^\alpha(t) = (1-\alpha) \left[1 - \sup_{(x,y) \in M} f_{x+ty}(x) \right] > 0, \forall t > 0.$$

$$\text{定理 2 } s^{(\alpha)}\left(\frac{t}{4}\right) \leq \rho_X^\alpha(t) \leq s^{(\alpha)}(4t)$$

其中 $\alpha' = \min\{1-\alpha, \alpha\}, 0 \leq t \leq \alpha'$.

证明:

$$\rho_X^\alpha(t) = \sup\left\{ \left\| \alpha x + \frac{t}{2}y \right\| - \alpha + \left\| (1-\alpha)x - \frac{t}{2}y \right\| - \right.$$

$$\left. (1-\alpha) : x, y \in S(X) \right\} \geq$$

$$\sup\left\{ \left\| \alpha x + \frac{t}{2}y \right\| - \alpha + \left\| (1-\alpha)x - \frac{t}{2}y \right\| - \right.$$

$$\left. (1-\alpha) : (x, y) \in M \right\} \geq$$

$$\sup\left\{ \left\| \alpha x + \frac{t}{2}y \right\| - \alpha : (x, y) \in M \right\}$$

$$(\text{因 } \left\| (1-\alpha)x - \frac{t}{2}y \right\| \geq (1-\alpha), \text{ 当 } (x, y) \in M) \geq$$

$$\alpha \cdot \sup\left\{ \int_{\frac{t}{4\alpha}}^{\frac{t}{2\alpha}} f_{x+sy}(y) : (x, y) \in M \right\} (\text{由引理 1 可得})$$

$$(\text{由于 } f_x(y) = 0, \text{ 由 } f_{x+sy}(y) \text{ 的单调递增可知 } f_{x+sy}(y) \geq 0)$$

$$\geq \alpha \cdot \sup\left\{ \int_{\frac{t}{4\alpha}}^{\frac{t}{2\alpha}} f_{x+ty}(y) ds : (x, y) \in M \right\} \geq$$

$$\alpha \cdot \sup\left\{ \int_{\frac{t}{4\alpha}}^{\frac{t}{2\alpha}} f_{x+\frac{t}{4\alpha}y}(y) ds : (x, y) \in M \right\} =$$

$$\frac{t}{4} \cdot \sup\{f_{x+\frac{t}{4\alpha}y}(y) : (x, y) \in M\} =$$

$$s^{(\alpha)}\left(\frac{t}{4}\right)$$

下面不等式的左半部分成立

$$\rho_X^\alpha(t) = \alpha \cdot \sup\left\{ \left\| x + \frac{t}{2\alpha}y \right\| - 1 + \left\| \frac{1-\alpha}{\alpha}x - \frac{t}{2\alpha}y \right\| - \right.$$

$$\left. \frac{1-\alpha}{\alpha} : x, y \in S(X) \right\} =$$

$$\alpha \cdot \sup\left\{ \left(f_{x+\frac{t}{2\alpha}y}\left(x + \frac{t}{2\alpha}y\right) - 1 \right) + \right.$$

$$\left. \frac{1-\alpha}{\alpha} \left(f_{x-\frac{ty}{2(1-\alpha)}}\left(x - \frac{ty}{2(1-\alpha)}\right) - 1 \right) : x, y \in S(X) \right\} =$$

$$\alpha \cdot \sup\left\{ f_{x+\frac{ty}{2\alpha}}(x) + \frac{1-\alpha}{\alpha} f_{x-\frac{ty}{2(1-\alpha)}}(x) + \right.$$

$$\left. \frac{t}{2\alpha} (f_{x+\frac{t}{2\alpha}}(y) - f_{x-\frac{ty}{2(1-\alpha)}}(y)) - \frac{1}{\alpha} : x, y \in S(X) \right\}$$

(当 $\frac{1}{1-\alpha} \geq \frac{1}{\alpha}$ 即 $\frac{1}{2} \leq \alpha < 1$, 利用 $f_{x+ty}(y)$ 的单调递增性)

$$\leq \alpha \cdot \sup\left\{ f_{x+\frac{ty}{2\alpha}}(x) + \frac{1-\alpha}{\alpha} f_{x-\frac{ty}{2(1-\alpha)}}(x) + \frac{t}{2\alpha} (f_{x+\frac{ty}{2(1-\alpha)}}(y) - \right.$$

$$\left. f_{x-\frac{ty}{2(1-\alpha)}}(y)) - \frac{1}{\alpha} : x, y \in S(X) \right\}$$

$$\text{令 } z = \frac{ax + \frac{1}{2(1-\alpha)}y}{\left\| ax + \frac{1}{2(1-\alpha)}y \right\|}, a = \frac{-1}{2(1-\alpha)} f_x(y)$$

则 $f_x(z) = 0$, 从而 $(x, z) \in M$.

$$\frac{t}{2\alpha} (f_{x+\frac{ty}{2(1-\alpha)}}(y) - f_{x-\frac{ty}{2(1-\alpha)}}(y)) =$$

$$\frac{1-\alpha}{\alpha} t \cdot \left\| ax + \frac{y}{2(1-\alpha)} \right\| (f_{x+\frac{ty}{2(1-\alpha)}}(z) - f_{x-\frac{ty}{2(1-\alpha)}}(z)) +$$

$$\frac{1-\alpha}{\alpha} at (f_{x-\frac{ty}{2(1-\alpha)}}(x) - f_{x+\frac{ty}{2(1-\alpha)}}(x))$$

$$\text{而 } \frac{1-\alpha}{\alpha} at (f_{x-\frac{ty}{2(1-\alpha)}}(x) - f_{x+\frac{ty}{2(1-\alpha)}}(x)) + f_{x+\frac{t}{2\alpha}}(x) +$$

$$\frac{1-\alpha}{\alpha} f_{x-\frac{ty}{2(1-\alpha)}}(x) =$$

$$\frac{1-\alpha}{\alpha} f_{x-\frac{ty}{2(1-\alpha)}}(x) (1+at) + f_{x+\frac{t}{2\alpha}}(x) -$$

$$\frac{1-\alpha}{\alpha} at \cdot f_{x+\frac{ty}{2(1-\alpha)}}(x) \leq \frac{1}{\alpha}$$

$$\text{又 } f_{x+\frac{ty}{2(1-\alpha)}} = f_{(1-at)x+t(ax+\frac{y}{2(1-\alpha)})} = f_{x+t\frac{\left\| ax+\frac{y}{2(1-\alpha)} \right\|}{1-at}}$$

$$f_{x-\frac{ty}{2(1-\alpha)}} = f_{(1+at)x-t(ax+\frac{y}{2(1-\alpha)})} = f_{x-t\frac{\left\| ax+\frac{y}{2(1-\alpha)} \right\|}{1+at}}$$

$$t \frac{\left\| ax + \frac{y}{2(1-\alpha)} \right\|}{1-at} \leq t \cdot \frac{|a| + \frac{1}{2(1-\alpha)}}{1-|a|t} \leq$$

$$t \frac{2}{2(1-\alpha)-t} \leq \frac{2t}{1-\alpha}$$

$$t \frac{\left\| ax + \frac{y}{2(1-\alpha)} \right\|}{1+at} \leq t \frac{|a| + \frac{1}{2(1-\alpha)}}{1+|a|t} \leq$$

$$\frac{2t}{1-\alpha}, t \in [0, 1-\alpha]$$

即

$$f_{x+\frac{ty}{2(1-\alpha)}}(z) = f_{x+t\frac{\left\| ax+\frac{y}{2(1-\alpha)} \right\|}{1-at}}(z) \leq f_{x+\frac{2t}{1-\alpha}}(z) -$$

$$f_{x-\frac{ty}{2(1-\alpha)}}(z) = f_{x+t\frac{\|ax+\frac{y}{2\alpha}\|}{1+at}}(-z) \leq f_{x+\frac{2t}{1-\alpha}}(-z) \leq f_{x+\frac{2t}{1-\alpha}}(z)$$

所以

$$\rho_X^\alpha(t) \leq \alpha \cdot \sup \left\{ \frac{1-\alpha}{\alpha} t \cdot \left\| ax + \frac{y}{2(1-\alpha)} \right\| \left(f_{x+\frac{ty}{2(1-\alpha)}}(z) - \right. \right.$$

$$\left. f_{x-\frac{ty}{2(1-\alpha)}}(z) \right), (x, z) \in M \} \leq$$

$$(1-\alpha)t \cdot \sup \left\{ \left(\|a\| + \frac{1}{2(1-\alpha)} \right) \left(f_{x+\frac{2t}{1-\alpha}}(z) - \right. \right.$$

$$\left. f_{x-\frac{2t}{1-\alpha}}(z) \right), (x, z) \in M \} \leq$$

$$2t \cdot \sup \{ f_{x+\frac{2t}{1-\alpha}}(z), (x, z) \in M \} \leq$$

$$4t \cdot \sup \{ f_{x+\frac{4t}{1-\alpha}}(z), (x, z) \in M \}$$

$$\text{当 } \frac{1}{1-\alpha} \leq \frac{1}{\alpha} \text{ 时,}$$

$$\rho_X^\alpha(t) \leq \alpha \cdot \sup \left\{ f_{x+\frac{ty}{2\alpha}}(x) + \frac{1-\alpha}{\alpha} f_{x-\frac{ty}{2(1-\alpha)}}(x) + \right.$$

$$\left. \frac{t}{2\alpha} (f_{x+\frac{ty}{2\alpha}}(y) - f_{x-\frac{ty}{2\alpha}}(y)) - \frac{1}{\alpha} : x, y \in S(x) \right\}$$

$$\text{此时我们令 } z = \frac{ax + \frac{1}{2\alpha}y}{\left\| ax + \frac{1}{2\alpha}y \right\|}, a = \frac{-1}{2\alpha} f_x(y) \text{ 于是}$$

$$(x, z) \in M.$$

$$\frac{t}{2\alpha} (f_{x+\frac{ty}{2\alpha}}(y) - f_{x-\frac{ty}{2\alpha}}(y)) = t \cdot \left\| ax + \frac{1}{2\alpha}y \right\| \left(f_{x+\frac{ty}{2\alpha}}(z) - f_{x-\frac{ty}{2\alpha}}(z) \right) +$$

$$at (f_{x-\frac{ty}{2\alpha}}(x) - f_{x+\frac{ty}{2\alpha}}(x))$$

而

$$at (f_{x-\frac{ty}{2\alpha}}(x) - f_{x+\frac{ty}{2\alpha}}(x)) + f_{x+\frac{ty}{2\alpha}}(x) + \frac{1-\alpha}{\alpha} f_{x-\frac{ty}{2(1-\alpha)}}(x) =$$

$$at \cdot f_{x-\frac{ty}{2\alpha}}(x) + (1-at) f_{x+\frac{ty}{2\alpha}}(x) + \frac{1-\alpha}{\alpha} f_{x-\frac{ty}{2(1-\alpha)}}(x) \leq \frac{1}{\alpha}$$

又

$$f_{x+\frac{ty}{2\alpha}} = f_{(1-at)x+t\left(ax+\frac{y}{2\alpha}\right)} = f_{x+t\frac{\left\| ax+\frac{y}{2\alpha} \right\|}{1+at}}, f_{x-\frac{ty}{2\alpha}} =$$

$$f_{(1+at)x-t\left(ax+\frac{y}{2\alpha}\right)} = f_{x-t\frac{\left\| ax+\frac{y}{2\alpha} \right\|}{1+at}}$$

$$t \frac{\left\| ax + \frac{y}{2\alpha} \right\|}{1+at} \leq t \frac{\|a\| + \frac{1}{2\alpha}}{1-\|a\|} \leq \frac{2t}{2\alpha-t} \leq \frac{2t}{\alpha},$$

$$t \frac{\left\| ax + \frac{y}{2\alpha} \right\|}{1+at} \leq t \frac{\|a\| + \frac{1}{2\alpha}}{1-\|a\|} \leq \frac{2t}{\alpha}, t \in [0, \alpha].$$

所以

$$\rho_X^\alpha(t) \leq \alpha \cdot \sup \left\{ t \left\| ax + \frac{y}{2\alpha} \right\| \left(f_{x+\frac{ty}{2\alpha}}(z) - f_{x-\frac{ty}{2\alpha}}(z) \right) : x, y \in S(X) \right\} \leq$$

$$\alpha \cdot \sup \left\{ t \left(\|a\| + \frac{1}{2\alpha} \right) \left(f_{x+\frac{2t}{1-\alpha}}(z) - f_{x-\frac{2t}{1-\alpha}}(z) \right) : (x, z) \in M \right\} \leq$$

$$t \cdot \sup \{ f_{x+\frac{2t}{1-\alpha}}(z) - f_{x-\frac{2t}{1-\alpha}}(z) : (x, z) \in M \} \leq$$

$$2t \cdot \sup \{ f_{x+\frac{2t}{1-\alpha}}(z) : (x, z) \in M \} \leq$$

$$4t \cdot \sup \{ f_{x+\frac{4t}{1-\alpha}}(z) : (x, z) \in M \}$$

综上定理2得证,于是我们可以得出下面的一个推论。

推论2 X 是一致光滑的充分必要条件为

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{s^{(\alpha)}(t)}{t} \rightarrow 0.$$

参考文献:

- [1] 崔云安. Banach 空间几何理论及应用 [M]. 北京: 科学出版社, 2001: 35.
- [2] 定光桂. 巴拿赫空间引论 [M]. 北京: 科学出版社, 1984: 63.
- [3] CLARKSON J. A. Uniformly Convex Spaces [J]. Trans. Amer. Math. Soc., 1936(40): 394.
- [4] 王丰辉, 杨长森. 关于广义凸性模 [J]. 河南师范大学学报(自然科学版), 2006(1): 183.
- WANG Fenghui, YANG Changseng. On Generalized Modulus of Convexity [J]. Journal of Henan Normal University(Nature of Science Edition), 2006(1): 183.
- [5] DIESTEL J. Geometry of Banach Space-Selected-topics [M]. Springer-Verlag, 1975: 20.
- [6] 程立新, 王廷辅, 陈连昌. Banach 空间的一类新特征函数 [J]. 哈尔滨科学技术大学学报, 1988(3): 93.
- CHENG Lixing, WANG Tingfu, CHEN Lianchang. NEW Characteristic Functions of Banach spaces [J]. Journal of Harbin University of Science and Technology, 1988(3): 93.
- [7] 赵亮, 於杨. 广义凸性模与广义光滑模的性质 [J]. 哈尔滨理工大学学报, 2020, 25(1): 144.
- ZHAO Liang, YU Yang. Properties of Generalized Modulus of Smoothness and Generalized Modulus of Convexity [J]. Journal of Harbin University of Science and Technology, 2020, 25(1): 144.
- [8] 於杨. Banach 空间广义光滑模及应用 [J]. 哈尔滨: 哈尔滨理工大学, 2019: 5.
- [9] ZUO Zhanfei. Banas-Hajnosz-Wedrychowicz Type Modulus of Convexity and Normal Structure in Banach Spaces [J]. Journal of Fixed Point Theory and Applications, 2018, 20(2): 1.
- [10] 赵亮, 王微微, 於杨. 广义光滑模在不动点中的应用 [J]. 黑龙江大学自然科学学报, 2019, 36(1): 7.
- ZHAO Liang, WANG Weiwei, YU Yang. The Application of Generalized Modulus of Smoothness in Fixed Point [J]. Journal of Natural Science of Heilongjiang University, 2019, 36(1): 7.
- [11] 赵亮, 王微微, 张兴. Banach 空间具有正规结构的判定条件 [J]. 哈尔滨理工大学学报, 2018, 26(4): 140.
- ZHAO Liang, WANG Weiwei, ZHANG Xing. Generalized Modulus of Smoothness in Banach Spaces [J]. Journal of Harbin University of Science and Technology, 2018, 26(4): 140.
- [12] GEORGE A. Conformable Fractional Approximations by Max-operators Using Convexity [J]. Arabian Journal of Mathematics, 2018, 7(3): 159.
- [13] 展玉佳. 广义 Orlicz 空间若干几何性质及应用 [J]. 哈尔滨: 哈

- 尔滨理工大学,2019:22.
- [14] 赵亮,张兴. Banach 空间中的广义光滑模 [J]. 哈尔滨理工大学学报,2016,21(4):112.
ZHAO Liang, ZHANG Xing. Generalized Modulus of Smoothness in Banach Spaces [J]. Journal of Harbin University of Science and Technology,2016,21(4):112.
- [15] 俞鑫泰. Banach 空间的几何理论 [M]. 上海: 华东师范大学出版社,1986:86.
- [16] 程立新,陈连昌,魏文展. 特征函数与 Banach 空间的凸性模、光滑模 [J]. 数学杂志,1990(3):309.
CHENG Lixin, CHEN Lianchang, WEI Wenzhan. Characteristic Functions and Modules of Convexity and Modules of Smoothness in Banach Spaces [J]. Journal of Mathematics,1990(3):309.
- [17] DANES J. On Local and Global Moduli of Convexity [J]. Comment. Math. Univ. Carolinae,1976(67):413.
- [18] DAY M M. Some Characterizations of Inner Products Spaces [J]. Trans Amer. Math. Soc. 62,1947(62):320.
- [19] 崔云安,左占飞. 广义凸性模在不动点中的应用 [J]. 黑龙江大学自然科学学报,2009,26(2):206.
CUI Yunan, ZUO Zhanfei. The Application of Generalization Modulus of Convexity in Fixed Point Theory [J]. Journal of Natural Science of Heilongjiang University, 2009, 26(2): 206.
- [20] 杨长森,赵俊峰. 凸性模估计定理的推广 [J]. 数学学报,1998,4(1):81.
YANG Changseng, ZHAO Junfeng. A Generalization for Estimation Theorem on Modulus of Convexity [J]. Acta Mathematica Sinica Chinese Series,1998,4(1):81.
- [21] 杨长森,左红亮. Hahn-Banach 定理在凸性模定义中的应用 [J]. 数学物理学报,2001,21(1):133.
YANG Changseng, ZUO Hongliang. An Application of Hahn-Banach's Theorem to Modulus of Convexity [J]. Acta Mathematica Scientia,2001,21(1):133.
- [22] SAEJUNG S. Characteristic of Convexity of a Banach Space and Normal Structure [J]. J. Math. Anal. Appl, 2008(337):123.
- [23] SAEJUNG S. Sufficient Conditions for Uniform Normal Structure of Banach Spaces and Their Dualspaces [J]. J. Math. Anal. Appl, 2007(330):597.
- [24] 吴春雪. 关于凸性模的一点标记 [J]. 哈尔滨理工大学学报,2003,8(1):118.
WU Chunxue. A Remark about Convex Modulus [J]. Journal of Harbin University of Science and Technology,2003,8(1):118.

(编辑: 温泽宇)